Jurnal Sainstek Vol. V No.1: 55-61, Juni 2013 ISSN: 2085-8019

INTEGER PROGRAMMING DENGAN PENDEKATAN METODE *BRANCH AND BOUND*

Nola Nari

Program Studi Tadris Matematika STAIN Batusangkar
Jl. Sudirman No. 137 Kubu Rajo Lima Kaum Batusangkar, 27213.
Email:nola_purple@yahoo.co.id

ABSTRACT

The purpose of this study was to determine the allocation of projects to be implemented by the Department of Road Infrastructure Pripinsi West Sumatra in 2005, so the cost minimum. The method used is the method of Branch And Bound together with the simplex method with a solution in the form of binary integer program .. By this method it was found that all the variables that represent each project is worth the cost of the current minimum, so that the entire project could be done with minimum total cost is Rp 17,789,289,600.00. This is in accordance with the reality on the ground that all projects can be realized by the Department of Road Infrastructure West Sumatra province.

Key words: branch and bound method, simpleks method, integer biner

PENDAHULUAN

Permasalahan pemrograman pada dasarnya berkaitan dengan penentuan alokasi yang optimal dari berbagai sumber yang tersedia untuk mencapai suatu tujuan. Pada keadaan ini,misalkan bagian perencanaan pada Dinas Prasarana Jalan pada tahun 2005 sesuai Rencana Anggaran Pendapatan dan Belanja Daerah (RAPBD) akan merencanakan beberapa kegiatan belanja modal. Dengan RAPBD yang sudah ada, harus dirancang perencanaan sebaik mungkin agar alokasi dana yang ada dapat dipergunakan tepat sasaran dan dapat mengoptimalkan pengeluaran APBD sesuai dengan isi Perda BAB XXII pasal 77 dan 78 mengenai pembiayaan.

Dinas tersebut harus mengkombinasikan beberapa sumber daya yang tersedia dalam jumlah yang terbatas. Setiap organisasi memiliki keterbatasan atas sumber dayanya, baik keterbatasan dalam jumlah mesin dan peralatan, ruang, tenaga kerja, maupun modal. Dengan keterbatasan ini, maka perlu merencanakan suatu strategi yang dapat mengoptimalkan hasil, baik berupa keuntungan maksimal maupun biaya minimal. Pemrograman Linear adalah teknik pengambilan keputusan untuk memecahkan masalah mengalokasikan sumber daya yang terbatas di antara berbagai kepentingan seoptimal mungkin.

Permasalahan di atas dapat digolongkan pada persoalan program integer. Menurut Dimyati (2002, 209), program integer adalah bentuk lain dari program *linier*, dimana sebagian dari nilai variabel keputusan harus berupa bilangan bulat (*integer*) dan sebagian lainnya berupa bilangan pecahan. Bentuk ini muncul karena dalam kenyataannya tidak semua variabel keputusan dapat berupa bilangan pecahan. Program integer biner adalah bagian dari program integer dimana variabel yang digunakan dibatasi bernilai 0 atau 1.

Dinas Prasarana Jalan sesuai APBD untuk meningkatkan pelayanan pada masyarakat harus melakukan beberapa kegiatan belanja modal dimana kegiatan tersebut akan selesai dalam satu tahun. Untuk persoalan ini solusi yang digunakan adalah *Capital Budgeting Problem* dengan bentuk variabel keputusan menurut Hillier (1995:482) berupa nilai 1 jika proyek diterima, nilai 0 jika proyek ditolak.

Program linier merupakan suatu perencanaan aktivitas-aktivitas untuk memperoleh suatu hasil yang optimum. Dalam penjelasan perencanaan tersebut digunakan model matematis.

Fungsi Linear

Menurut Dimyati (2002,23) suatu fungsi $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ dari $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ adalah fungsi linear jika dan hanya jika untuk sejumlah set konstanta $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n$ berlaku $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$.

Model Program Linear

Program linier menggunakan model matematika untuk menggambarkan model matematika untuk menggambarkan masalah yang sedang dihadapi. Pada dasarnya model pemrograman linier dinyatakan dalam bentuk fungsi tujuan dan fungsi kendala (batasan). Fungsi tujuan merupakan kesamaan fungsi dari nilai variabel. Fungsi kendala menggambarkan batasan atau kendala yang dihadapi dalam mencapai tujuan. Model dasar dari program linier adalah :

Optimumkan : $Z = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j$

Dengan kendala : $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j \leq atau \geq b_i$

Dimana : $x_j \geq 0$

Keterangan I = nomor sumber atau fasilitas yang tersedia (i=1,2,...,m); J = nomor kegiatan yang menggunakan sumber yang tersedia; M = jumlah sumber yang tersedia; N = jumlah kegiatan; (Z) = nilai optimum dari fungsi tujuan; X_j = jenis kegiatan; A_{ij} = banyak simber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unit kegiatan j; B_i = banyak sum-ber i yang tersedia dan C_j = kenaikan nilai z apabila pertambahan i unit kegiatan j.

Sistem pertidaksamaan pada kendala dapat dijadikan persamaan dengan menambahkan *slack variabel / surplus variabel*, sehingga sistem persamaannya dapat diformulasikan dalam bentuk matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dengan pembatasan pada model program linier dapat ditulis ke dalam bentuk system persamaan AX =B dengan $m \geq n$

Solusi Program Linear

Menurut Dimyati (2002:48) solusi basis sistem persamaan AX = b adalah solusi dimana terdapat sebanyak-banyaknya m variabel berharga bukan nol. Untuk mendapatkan solusi basis dari AX = b, maka sebanyak (n-m) variabel harus dinolkan. Variabel-variabel yang dinolkan disebut variabel non basis (NBV). Selanjutnya dapatkan harga dari n-(n-m)= m variabel lainnya yang memenuhi AX = b, yang disebut variabel basis (BV). Dalam buku yang sama menurut Dimyati (2002, 48) yang dimaksud dengan solusi fisibel titik ekstrim atau titik sudut ialah solusi fisibel yang tidak terletak pada suatu segmen garis yang menghubungkan dua sisi fisibel lainnya. Jika seluruh variabel pada suatu solusi basis berharga non negative, maka solusi ini disebut solusi basisi fisibel (BFS).

Optimasi (maksimum,minimum)

Suatu persoalan program linier dikatakan persoalan maksimalisasi normal jika persoalan itu mempunyai fungsi tujuan maksimal dengan seluruh variabel berharga non negative dan seluruh pembatas bertanda $\leq$. Begitu juga persoalan program linier dikatakan sebagai persoalan minimasi normal jika fungsi tujuan dari persoalan itu adalah minimum dengan seluruh variabel berharga non negative dan seluruh pembatas bertanda $\geq$. Jika pembatasnya mempunyai tanda yang lain, seperti = dan $\geq$ (untuk persoalan maksimisasi) atau = dan $\leq$ (untuk persoalan minimalisasi) maka persoalan program linier bersangkutan disebut persoalan program linier tidak normal.

Program Integer

Menurut Dimyati (2002: 209) program integer adalah bentuk lain dari program linier, dimana sebagian dari nilai variabel keputusan harus berupa bilangan bulat (*integer*) dan sebagian lainnya berupa bilangan pecahan. Bentuk ini muncul karena dalam kenyataannya tidak semua variabel keputusan dapat berupa bilangan pecahan.

Menurut Nasendi (1985,157), program integer adalah bentuk khusus dari program linier dimana satu atau lebih dari satu variabel-variabel dalam vector penyelesaian memiliki nilai-nilai bukan pecahan tetapi bilangan bulat. Model umum dari program integer ini adalah Optimumkan : $z = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, Dengan kendala: $a_i\ (x_1,x_2,\dots,x_n) \leq$ atau $\geq b_i$; Dimana : $x_j \geq 0$, $I = 1,2,3,\dots,m$: X_j = integer dan $J = 1,2,3,\dots,n$.

Menurut Nasendi (1985,157), program integer khusus 0-1 (PI Biner) merupakan bentuk khusus dari program integer, yang mana variabel kontrolnya dibatasi harus berharga nol atau satu.

Formulasi dari fungsi ini adalah Optimumkan : $Z = c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j$; Dengan kendala : $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leq atau \geq b_i; i = 1,2,3,\dots,m$; $X_j = 0$ atau 1 ; $j = 1,2,3,\dots,n$; Dimana : a_{ij} ,b_j dan c_j adalah konstanta.

***Capital Budgeting Problem*/Masalah Anggaran Biaya**

Misalkan v_j adalah manfaat yang dapat diperoleh apabila barang ke-j dipilih dan B_j adalah sumber yang tersedia, dan aij adalah jumlah sumber yang digunakan tanpa melebihi jumlah sumber yang tersedia. Untuk persoalan ini solusi yang digunakan adalah *Capital Budgeting Problem*. Model *Capital Budgeting Problem* yang digunakan menurut Ravindra (1987, 185) adalah : Maksimumkan : $Z = \sum_{j=1}^{n} v_jX_j = v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n$; Dengan kendala : $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leq B_i; i = 1,2,3,\dots,T$; $0 \leq x_j \leq 1$, untuk ; $j = 1,2,3,\dots,N$; Dimana : Z= fungsi maksimumkan; v_j = manfaat yang dapat diperoleh apabila proyek ke-j dipilih; a_{ij} = jumlah sumber yang digunakan dan B_T = jumlah dana yang tersedia

Masalah anggaran biaya pada penelitian ini merupakan suatu persoalan optimasi dimana fungsi tujuannya adalah meminimumkan pengeluaran. Dengan mengganti batasan kendala menjadi tanda $\geq$, formulasi pada persamaan di atas dapat ditulis Minimumkan : $Z = \sum_{j=1}^{n} v_jX_j = v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + vnxn$; Dengan kendala : $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geq B_i; i = 1,2,3,\dots,T$ dan $0 \leq x_j \leq 1$, untuk ; $j = 1,2,3,\dots,N$; Dimana : Z = fungsi tujuan minimumkan; v_j= manfaat yang dapat diperoleh apabila proyek ke-j dipilih a_{ij} = jumlah sumber yang digunakan; B_T = jumlah dana yang tersedia

Bentuk variabel keputusan persoalan *Capital Budgeting Problem Biner* menurut Hilier (1995,482) yaitu :

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{jika proyek j diterima} \\ 0, \text{jika proyek j ditolak (pengerjaannya ditunda)} \end{cases}$$

Metode Simpleks

Menurut Supranto (1983,54), metode simpleks adalah suatu metode yang secara sistematis dimulai dari suatu penyelesaian dasar yang fisibel ke penyelesaian dasar fisibel lainnya, yang dilakukan berulang-ulang (*iterative*) sehingga tercapai suatu penyelesaian optimum.

Langkah-langkah penyelesaian masalah program linier dengan metode simpleks menurut Supranto (1983,54), adalah sebagai berikut :

(perhatikan : kita anggap, bahwa kita sudah mempunyai suatu pemecahan dasar yang fisibel yaitu x_B dari suatu persoalan linier programming dimana Z merupakan nilai fungsi tujuan dan untuk semua A_j, Y_j, dan $z_j - c_j$ yang bersangkutan dengan pemecahan dasar yang fisibel diketahui).

1. Selidiki semua nilai z_j-c_j. Setelah itu perhatikan tiga hal berikut :
   a. Selidiki nilai z_j-$c_j \geq 0$. Di dalam hal ini pemecahan dasar fisibel yang

bersangkutan sudah memberikan pemecahan yang optimum. Proses ini dihentiakan, sebab pemecahan sudah selesai.

b. Satu atau lebih nilai $z_j - c_j < 0$ dan untuk paling tidak satu Ak untuk mana $z_k - c_k < 0$, dan semua $y_{ik} \leq 0$. Di dalam hal ini pemecahan menjadi tidak ada batasannya (*inbounded solution*)

c. Satu atau lebih nilai $z_j - c_j < 0$ dan masing-masing dari padanya mempunyai $y_{ij} > 0$ paling tidak untuk satu i. kemudian pilihlah salah satu vector, katakanlah Ak dan masukkan ke dalam basis.

2. Kalau hasilnya ternyata termasuk kategori 1c, maka tuntukan vector yang akan dikeluarkan / disingkirkan dari matriks basis B dengan mempergunakan syarat berikut :

$$\frac{x_B}{y_{rk}} = \min i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\}$$

Maka kolom ke-r kemudian dikeluarkan dan diganti dengan A_k. Kita hitung nilai yang baru.

3. Dengan mempergunakan rumus-rumus berikut :

a. $x'_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \cdot \frac{y_{ij}}{y_{rj}}, untuk\ i \neq r$

$x'_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}, untuk\ i = r$

b. $Z' = Z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}}(c_j - z_j)$

c. $Y'_{ij} = y_{ij} - y_{rj}\frac{y_{ik}}{y_{rk}}, untuk\ i \neq r\ dan\ Y'_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}, untuk\ i = r$

d. $z'_j - c_j = z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$

Dengan indeks k menggantikan j khususnya dalam rumus a dan b di atas, maka hitunglah nilai-nilai $x'_B, Z'\ dan\ z'_j - c_j$ untuk semua j. perhitungan – perhitungan tersebut sangat diperlukan untuk memperoleh pemecahan dasar yang fisibel. Kemudian kembali ke urutan pertama yang pertama yaitu nomor 1 di atas. Apabila tidak ada"*degeneracy*" prosedur tiap iteratip ini akan menghasilkan pemecahan dasar yang fisibel di dalam urutan / langkah yang terbatas.

Metode *Branch And Bound*

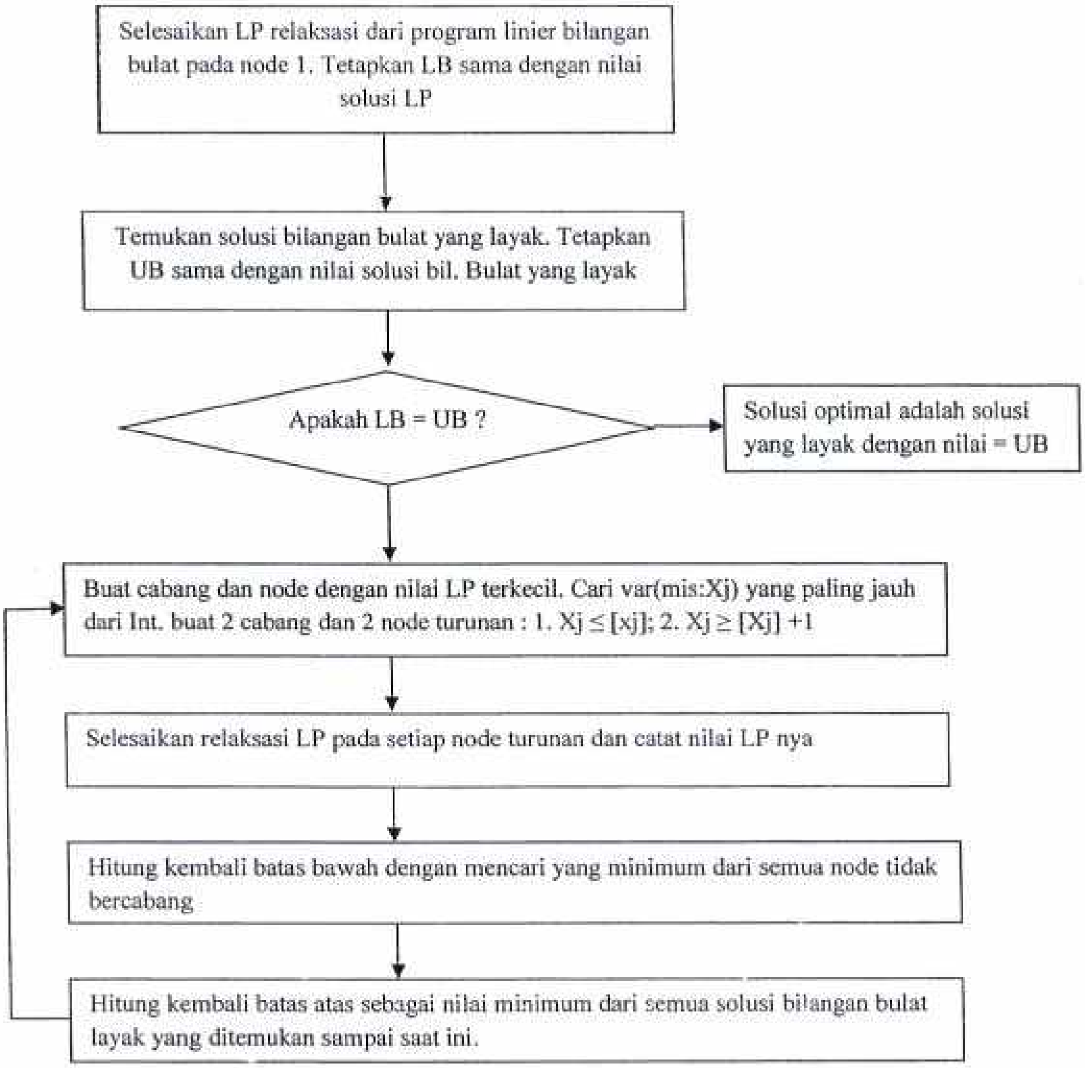
Algoritma *Branch and Bound* pertama kali dikembangkan pada tahun 1960 **A.Land** dan **G.Doing** untuk masalah program bilangan bulat baik murni maupun campuran. Kemudian pada tahun 1965 **E.Balas** mengembangkan algoritma pada program integer khusus nol satu.

Metode *Branch and bound* merupakan teknik solusi yang tidak terbatas hanya untuk persoalan program integer saja, tapi juga merupakan solusi yang dapat diterapkan untuk berbagai macam permasalahan yang berbeda. Prinsip yang mendasari pendekatan *Branch and Bound* ini adalah total set solusi yang *fisibel* dapat dibagi menjadi sub masalah – sub masalah yang lebih kecil. Penerapan pendekatan metode *Branch and Bound* digunakan bersama-sama metode simpleks yang normal.

Metode ini menggunakan suatu diagram yang terdiri dari node dan cabang (*branc*) sebagai suatu kerangka dalam proses solusi. Node pertama dalam diagram *Branch and Bound* berisi solusi program linier dan solusi pembulatan.

METODE PENELITIAN

Sesuai dengan permasalahan yang diteliti, jenis penelitian ini digolongkan ke dalam penelitian terapan. Menurut Kuncoro (2003,6), penelitian terapan merupakan penelitian yang menyangkut aplikasi teori untuk memecahkan permasalahan tertentu. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah dara sekunder yang diperoleh dari Dinas Prasarana Jalan Propinsi Sumatera Barat (data tahun Anggaran 2005) dalam Nola (2006: 22). Teknik analisis data dilakukan dengan memformulasikan data yang didapat kebentuk model matematika masalah anggaran biaya program *integer biner*. Program *integer biner* tersebut dapat kita bentuk dengan mensyaratkan bahwa solusi untuk setiap kegiatan tersebut kecil atau sama dengan satu. Kemudian melakukan perhitungan dengan menggunakan langkah yang ada pada metode *Branch and Bound* sehingga didapatkan jawaban yang optimal seperti gambar 1. Selanjutnya menentukan kegiatan mana yang dikerjakan pada tahun 2005 sesuai metode *Branch and Bound*. Diakiri dengan menentukan biaya total yang dikeluarkan.



Gambar 1 Diagram Alir Prosedur Solusi *Branch and Bound*

HASIL DAN PEMBAHASAN

Deskripsi Data

Berdasarkan data yang diperoleh dari dinas Prasarana Jalan Propinsi Sumater Barat terdapat lima kegiatan yang dipilih dengan kategori Belanja modal Tahun Anggaran 2005 (Nola, 2006: 21). Kegiatan dalam belanja modal tersebut terdiri dari A = Kegiatan Pembangunan jalan dan jembatan wilayah Solok, B = Kegiatan Pembangunan Jalan Menunjang wisata, C = Kegiatan pembangunan jalan transmigrasi lunang silaut, D = Kegiatan pengadaan AMP, E = Kegiatan penggantian Jembatan Propinsi. Adapun kegiatan tersebut dapat diformulasikan secara matematis sebagai berikut :

Minimumkan : 3.494.649.300 A + 2.300.000.000 B + 1.000.000.000 C + 2.000.000.000 D + 8.994.649.300 E

Kendala :

9.888.500 A + 93.583.075 B + 8.217.800 D + 14.963.458 E ≥ 575.663.873

691.313.645 A + 12.856.240 B + 8.305.000 D + 1.472.182.258 E ≥ 1.851.625.450

871.040.325 A + 192.255.220 B + 894.034.157 E $\geq$ 1.366.264.473

924.862.335 A + 221.627.225 B + 9.893.125 D + 1.331.666.485 E $\geq$ 1.832.256.923

622.819.667 A + 223.608.750 B + 398.585.000 D + 79.635.186 E $\geq$ 811.922.163

559.176.500 B + 1.478.500 D + 1.904.457.238 E $\geq$ 1.377.130.948

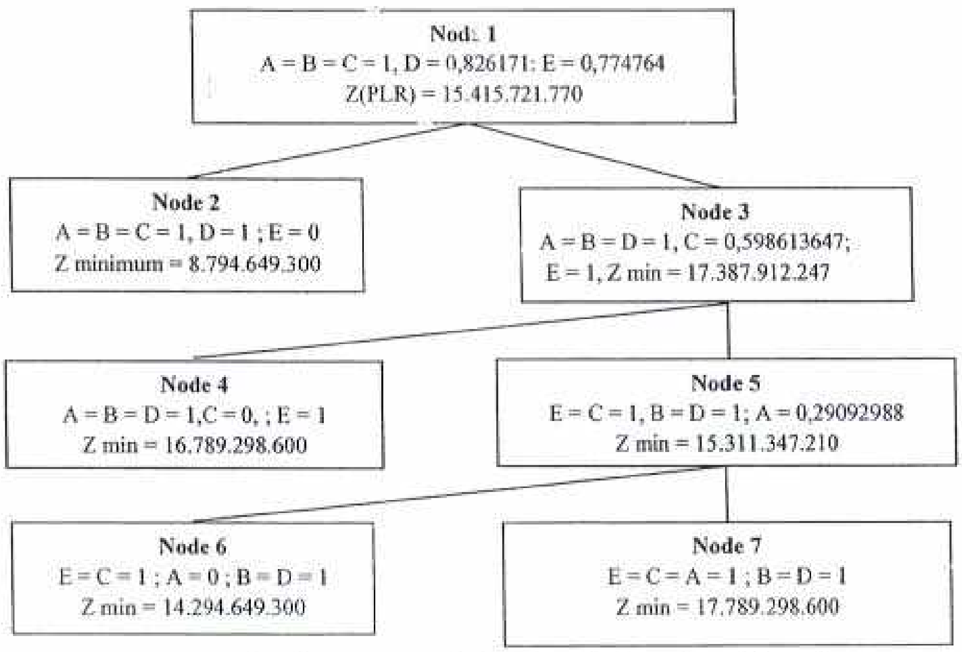
281.164.788 A + 344.353.095 B + 200.984.940 C + 104.259.900 D + 278.049.502 E $\geq$ 1.128.139.613

742.163.365 A + 338.281.270 B + 803.939.760 C + 1.467.025.400 D + 3.019.405.522 E $\geq$ 3.753.783.389

$A \leq 1$; $B \leq 1$; $C \leq 1$; $D \leq 1$ dan $E \leq 1$

A,B,C,D,E,= 0 atau 1

Dari model matematika di atas kemudian dilakukan operasi matematis dengan menerapkan metode *Branch and Bound* untuk menentukan solusi optimal dengan langkah 1. Penyelesaian masalah program linear relaksasi dari program linier bilangan bulat, didapat node 1 dengan nilai A = B = C = 1; E = 0,774764 ; D = 0,826171 ; Z (PLR) = 15.415.721.770. tetapkan Z(PLR) sebagai Z*. Langkah 2 : solusi program linier relaksasi di atas belum memenuhi syarat bilangan bulat. Selanjutnya selesaikan dengan menggunakan metode Branch and Bound. Langkah 3 : buat cabang atau node pada nilai variabel yang tidak integer. Karena ada 2 variabel yang belum integer, maka pilih salah satu yang nilainya jauh dari satu. Pilih variabel E = 0,774764 dengan pencabangan E = 0 dan E = 1. Untuk iterasi 1 sub masalah 1 pada node 2 diperoleh LP optimum dengan nilai E = 0, B = A = C = D = 1 dan Z minimum = 8.794.694.300. Z minimum $\leq$ 8.794.649.300. nilai ini memenuhi syarat uji penghentian (uji 1) dimana nilai $Z \leq Z^*$. proses iterasi pada sub masalah 1 dihentikan. Sub masalah 2 node 3 dengan nilai E = 1 diperoleh nilai LP optimal dengan nilai A = B = D = 1 ; C = 0,598613647 dengan Z minimum = 17.387.912.247 ($Z \geq Z^*$). Proses iterasi dilanjutkan sehingga diperoleh nilai Z minimum.



Gambar 2 Pohon Solusi Metode *Branch and Bound*

Berdasarkan deskripsi data, maka untuk menentukan formulasi masalah anggaran biaya Dinas Prasaran jalan Propinsi Sumatera Barat digunakan kombinasi kebutuhan anggaran untuk masing-masing kegiatan setiap bulan mulai bulan Mei sampai Desember. Fungsi tujuan untuk masalah ini merupakan jumlah biaya yang harus dikeluarkan untuk masing masing kegiatan. Dari solusi dengan menerapkan metode Branch and Bound dapat diketahui bahwa untuk meminimumkam pengeluaran APBD dari kendala yang ada maka seluruh kegiatan dapat dilaksanakan. Semua variabel yang dihasilkan dari metode ini bernilai satu. Hasil dalam penerapan metode ini telihat pada Gambar 2.

Hasil pada pohon solusi hampir bersesuaian dengan keadaan di lapangan yang di tunjukkan oleh laporan realisasi pelaksanaan kegiatan APBD tahun tersebut dimana realisasi kegiata A = 99,7315 %, B = 99,2871%, C = 99,4975%, D = 99,8882% dan E = 99,9972%.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan pada penelitian ini maka dapat diperoleh bahwa dengan menerapkan motode *Branch and Bound* seluruh variabel bernilai satu dan seluruh proyek dapat dilaksanakan karena semua variabel bernilai satu. Total biaya minimum yang dikeluarkan untuk pengerjaan seluruh proyek adalah Rp 17.789.289.600,00. Jadi model dan metode ini dapat diterapkan pada masalah masalah lain yang berkaitan dengan kasus program integer biner yang melibatkan variabel lebih banyak.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Anton H. 1998. *Aljabar Linier Elementer*, edisi kelima. Jakarta: Erlangga.

Anderson,1996, *Manajemen Sains Pendekatan Kuantitatif untuk Pengambilan Keputusan Manajemen*, edisi ketujuh. Jakarta: Erlangga.

Dimyati T dan Tarliah A. 1992. *Operations Reaserch Model model Pengambilan Keputusan*,edisi keempat. Bandung: Sinar Baru.

Hillier FS, Lieberman dan Gerald J. 1995. *Introduction to Operations Reaserch*, edisi ketujuh. University State of American.

Mulyani, Sri. 1998. *Operasi Riset*. Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta.

Nola N. 1996. *Penyelesaian Masalah Anggaran Biaya Dinas Prasarana Jalan Propinsi Sumatera Barat tahun 2005 dengan Menggunakan Metode Branch And Bound*. (Tugas Akhir tidak diterbitkan, UNP. Padang).

Ravindra A, Don TP and James JS. 1987. *Operations Reaserch Principles And Practice*. Willey, Singapura.

Supranto JMA. 1983. *Linear Programing*. Jakarta: Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Taha HA. 1996. *Riset Operasi Suatu Pengantar*, (alih bahasa : Drs Danirl Wiraya) edisi kelima. Jakarta: Bina Pura.